4.4.9 Funkce přímá úměrnost I

Předpoklady: 040408

Pedagogická poznámka: Na hodinu rozdávám žákům čtverečkované papíry.

Př. 1: V učebnicích matematiky bývá funkce přímá úměrnost definována takto: "Přímou úměrností nazýváme funkci $f: y = kx, x \in R$, kde k je nenulové reálné číslo zvané koeficient přímé úměrnosti *f*."
Jak se tato definice liší od pojetí přímé úměrnosti z minulé hodiny? Co je grafem takto definované přímé úměrnosti?

Dva rozdíly v definici:

- $x \in R \Rightarrow$ za x můžeme dosazovat i záporná čísla,
- k je nenulové reálné číslo $\Rightarrow$ k může být i záporné.

Grafy, které jsme kreslili v minulé hodině, se příliš nezmění, jen se prodlouží do záporných čísel.
Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející bodem $[0;0]$ (počátkem soustavy souřadnic).

Domluva: Od tohoto okamžiku budeme za definiční obor přímé úměrnosti, která přímo nepředstavuje reálnou situaci, považovat množinu všech čísel, pro která dokážeme určit hodnotu, tedy množinu všech reálných čísel *R*.

Př. 2: Doplň tabulku hodnot funkce $y = 3x$.

x	-2	-0,3	1	$\frac{2}{5}$			
y					-3	1	$\frac{1}{3}$

Pokud máme dopočítat hodnoty *y*, musíme dosadit do vzorce $y = 3x$.

- $x = -2$: $y = 3 \cdot (-2) = -6$,
- $x = -0,3$: $y = 3 \cdot (-0,3) = -0,9$,
- $x = 1$: $y = 3 \cdot 1 = 3$,
- $x = \frac{2}{5}$: $y = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

Pokud máme z hodnot *y* vypočítat hodnoty *x*, musíme si předpis "obrátit" (vyjádřit *x*).

$y = 3x \quad /:3$

$x = \frac{y}{3}$

- $y = -3$: $x = \frac{y}{3} = \frac{-3}{3} = -1$,
- $y = 1$: $x = \frac{y}{3} = \frac{1}{3}$,

- $y=\frac{1}{3}$: $x=\frac{y}{3}=\frac{\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{9}$.

x	-2	-0,3	1	$\frac{2}{5}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	-6	-0,9	3	$\frac{6}{5}$	-3	1	$\frac{1}{3}$

Př. 3: Doplň tabulku.

Funkce	$y=4x$	$y=-3x$	$y=-\frac{1}{7}x$	$y=\frac{1}{11}x$	$y=\frac{3}{5}x$	$y=-\frac{9}{7}x$	$y=kx$
souřadnice bodu $[1;?]$							
souřadnice bodu $[?;1]$							

Bod $[1;?]$ $\Rightarrow$ známe $x=1$ $\Rightarrow$ $y=4x=4\cdot 1=4$. Podobně v ostatních případech.

Bod $[?;1]$ $\Rightarrow$ známe $y=1$ $\Rightarrow$ $1=4x$ $\Rightarrow$ $x=\frac{1}{4}$. Podobně v ostatních případech.

Funkce	$y=4x$	$y=-3x$	$y=-\frac{1}{7}x$	$y=\frac{1}{11}x$	$y=\frac{3}{5}x$	$y=-\frac{9}{7}x$	$y=kx$
souřadnice bodu $[1;?]$	$[1;4]$	$[1;-3]$	$\left[1;-\frac{1}{7}\right]$	$\left[1;\frac{1}{11}\right]$	$\left[1;\frac{3}{5}\right]$	$\left[1;-\frac{9}{7}\right]$	$[1;k]$
souřadnice bodu $[?;1]$	$\left[\frac{1}{4};1\right]$	$\left[-\frac{1}{3};1\right]$	$[-7;1]$	$[11;1]$	$\left[\frac{5}{3};1\right]$	$\left[-\frac{7}{9};1\right]$	$\left[\frac{1}{k};1\right]$

Př. 4: Nakresli do jednoho grafu obrázky funkcí. Využij body s celočíselnými souřadnicemi.

a) $y=-\frac{1}{3}x$ b) $y=-x$ c) $y=-\frac{1}{4}x$ d) $y=2x$

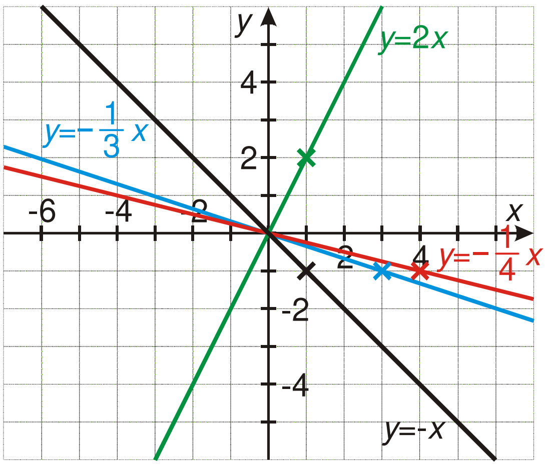
U všech funkcí stačí dopočítat jediný bod, jako druhý využijeme bod $[0;0]$, kterým prochází graf každé přímé úměrnosti.

a) $y=-\frac{1}{3}x$ $x=3$: $y=-\frac{1}{3}x=-\frac{1}{3}\cdot 3=-1$ $\Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[3;-1]$

b) $y=-x$ $x=1$: $y=-x=-1$ $\Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[1;-1]$

c) $y=-\frac{1}{4}x$ $x=4$: $y=-\frac{1}{4}x=-\frac{1}{4}\cdot 4=-1$ $\Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[4;-1]$

d) $y=2x$ $x=1$: $y=2x=2\cdot 1=2$ $\Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[1;2]$



Př. 5: Narýsuj do čtvercové sítě grafy následujících přímých úměrností.

a) $y=0,5x$ b) $y=-2x$ c) $y=\frac{8}{3}x$ d) $y=-\frac{3}{4}x$ e) $y=\frac{6}{5}x$

Pro kreslení grafů využij vrcholy čtvercové sítě. U každé funkce najdi vrcholy sítě, kterými graf prochází. Vypiš jejich souřadnice. Co platí pro souřadnice takto vypsaných bodů u jednotlivých funkcí?

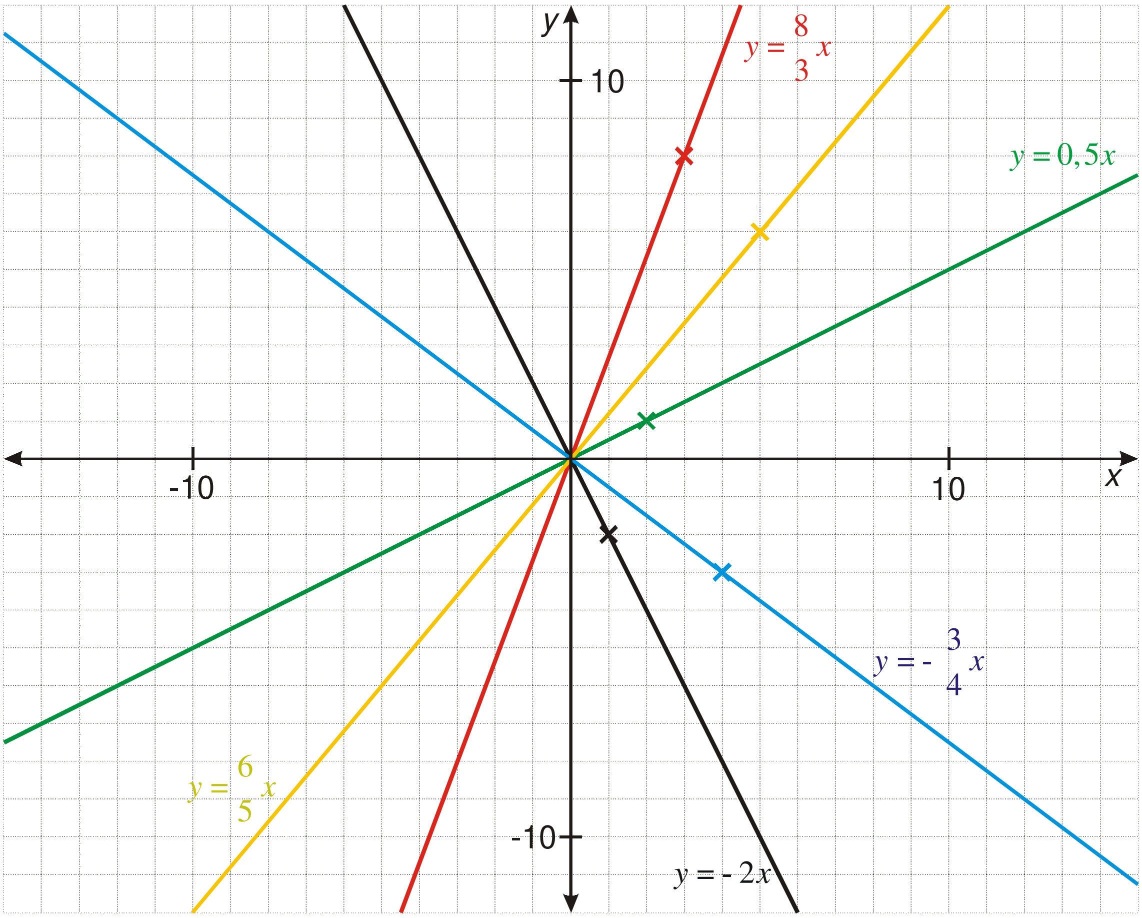
a) $y=0,5x$ $x=2$: $y=0,5x=0,5\cdot 2=1 \Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[2;1]$

b) $y=-2x$ $x=1$: $y=-2x=-2\cdot 1=-2 \Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[1;-2]$

c) $y=\frac{8}{3}x$ $x=3$: $y=\frac{8}{3}x=\frac{8}{3}\cdot 3=8 \Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[3;8]$

d) $y=-\frac{3}{4}x$ $x=4$: $y=-\frac{3}{4}x=-\frac{3}{4}\cdot 4=-3 \Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[4;-3]$

e) $y=\frac{6}{5}x$ $x=5$: $y=\frac{6}{5}x=\frac{6}{5}\cdot 5=6 \Rightarrow$ body $[0;0]$ a $[5;6]$



Vrcholy sítě, kterými prochází grafy:

$y = 0,5x$

Body: $[0;0]$, $[2;1]$, $[4;2]$, $[6;3]$, $[8;4]$, ..., $[-2;-1]$, $[-4;-2]$, $[-6;-3]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = 0,5$ (upravený předpis funkce).

$y = -2x$

Body: $[0;0]$, $[1;-2]$, $[2;-4]$, $[3;-6]$, $[4;-8]$, ..., $[-1;2]$, $[-2;4]$, $[-3;6]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = -2$ (upravený předpis funkce).

$y = \frac{8}{3}x$

Body: $[0;0]$, $[3;8]$, $[6;16]$, ..., $[-3;-8]$, $[-6;-16]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = \frac{8}{3}$ (upravený předpis funkce).

$y = -\frac{4}{3}x$

Body: $[0;0]$, $[3;-4]$, $[6;-8]$, $[9;-12]$, ..., $[-3;4]$, $[-6;8]$, $[-9;12]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$ (upravený předpis funkce).

$y = \frac{6}{5}x$

Body: $[0;0]$, $[5;6]$, $[10;12]$, ..., $[-5;-6]$, $[-10;-12]$, ...

Pro všechny body platí $\frac{y}{x} = \frac{6}{5}$ (upravený předpis funkce).

Př. 6: Které z funkcí z předchozího příkladu můžeme označit jako rostoucí? Které jako klesající? Pro které hodnoty koeficientu *k*, je funkce přímá úměrnost rostoucí? Kdy je klesající?

Rostoucí funkce (hodnoty *y* se zvětšují, když se zvětšují hodnoty *x*, graf jde zleva zdola doprava nahoru): $y = 0,5x$, $y = \frac{8}{3}x$, $y = \frac{6}{5}x$.

Klesající funkce (hodnoty *y* se zmenšují, když se zvětšují hodnoty *x*, graf jde zleva shora doprava dolů): $y = -2x$, $y = -\frac{3}{4}x$.

Funkce přímá úměrnost je rostoucí, pokud platí $k > 0$.

Funkce přímá úměrnost je klesající, pokud platí $k < 0$.

Př. 7: Najdi body s oběma celočíselnými souřadnicemi, kterými prochází graf přímé úměrnosti: a) $y = \frac{3}{2}x$, b) $y = \frac{3}{5}x$ c) $y = -\frac{7}{4}x$

U každého bodu se pokus zapsat všechny možnosti pomocí libovolného celého čísla *k*.

a) $y = \frac{3}{2}x$

Podobné jako předminulý příklad $\Rightarrow$ stačí rozšiřovat zlomek v předpisu funkce.

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{-3}{-2} = \frac{-6}{-4} = ...$ $\Rightarrow$ body $[0;0]$, $[2;3]$, $[4;6]$, $[6;9]$, $[-2;-3]$, $[-4;-6]$ ...

Všechny body se dají napsat $[2k;3k]$, kde $k \in Z$.

b) $y = \frac{3}{5}x$

$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{-3}{-5} = \frac{-6}{-10} = ...$ $\Rightarrow$ body $[0;0]$, $[5;3]$, $[10;6]$, $[15;9]$, $[-5;-3]$, $[-10;-6]$ ...

Všechny body se dají napsat $[5k;3k]$, kde $k \in Z$.

c) $y = -\frac{7}{4}x$

$\frac{-7}{4} = \frac{-14}{8} = \frac{-21}{12} = \frac{7}{-4} = \frac{14}{-8} = ...$ $\Rightarrow$ body $[0;0]$, $[4;-7]$, $[8;-14]$, $[12;-21]$, $[-4;7]$, $[-8;14]$ ...

Všechny body se dají napsat $[4k;-7k]$, kde $k \in Z$.

Shrnutí: Celočíselné souřadnice přímé úměrnosti mají ledacos společného s poměrem.